Capítulo 6 - Grafos Aleatórios

O grafo aleatório de Erdős e Rényi $G(n,p)$ é obtido do grafo completo K_n ao mantermos cada aresta independentemente ao acaso com probabilidade p.

- Observe que $G(n,p)$ ñ é de fato um grafo; é uma distribuição de probabilidade sobre todos os grafos com n vértices.

- Ao longo desse tópico, $p := p(n)$ é uma função de n.

$p = o(n^{-1})$

Teo 6.1.1 Se $p \ll 1/n$, então $\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) \to 0$ qndo $n \to \infty$.

Proof.

- Seja X uma variável aleatória que conta o número de triângulos e observe que

$$\mathbb{P}(K_3 \subset G(n,p)) = \mathbb{P}(X \geq 1).$$

- Há $\binom{n}{3}$ triângulos em K_n.
- Sejam $T_1, T_2, \dots T_{\binom{n}{3}}$ os triângulos do K_n e seja X_i a variável indicadora do evento $T_i \subseteq K_n$.
- Lembre-se que a esperança de uma variável indicadora é a probabilidade do evento. Assim,

$$\mathbb{E}[X_i] = p^3.$$

- Note tbm que $X = \sum_{i \in \binom{n}{3}} X_i$

- Assim, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i \in \binom{n}{3}} X_i\right] = \sum_{i \in \binom{n}{3}} \mathbb{E}[X_i] = \binom{n}{3} p^3$.

$$= \frac{n!}{3!(n-3)!} p^3 = \frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{3!\ \cancel{(n-3)!}} p^3$$

$$\leq n^3 p^3 = (\underline{np})^3 \to 0 \quad \text{qndo } n \to \infty$$

↳ note que $np \to 0$, pois $p = o(1/n)$)

- Pela desigualdade de Markov, segue que

$\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) = \mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}[X] \to 0$ qndo $n \to \infty$, como afirmado $\square$

$p = \omega(n^{-1})$

Teo 6.1.2. Se $p \gg 1/n$, então $\mathbb{P}(K_3 \subset G(n,p)) \to 1$ qndo $n \to \infty$.

Demonstração.

- Seja $G := G(n,p)$.
- Seja $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_\ell\}$, onde $\ell = \binom{n}{3}$, o conjunto de todos os triângulos do K_n.
- Seja X_i a variável indicadora do evento $T_i \in G$
- Seja $X = \sum_{i=1}^{\ell} X_i$ e note que X conta o número de triângulos em G
- Sabemos que a esperança de uma variável indicadora é a probabilidade do evento indicado por ela. Assim,

$$\mathbb{E}[X_i] = p^3 \qquad \forall\, i \in [\ell]$$

- Assim, temos que

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{\ell} X_i\Big] = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{\ell} p^3 = \binom{n}{3} p^3$$

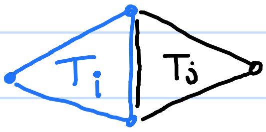
$$\geq \frac{n^3}{3^3} p^3 = \left(\frac{np}{3}\right)^3 \to \infty, \quad \text{pois} \quad p \gg n^{-1}.$$

- Vamos usar o método do segundo momento para finalizar o teorema. Para isso, vamos aplicar a proposição 5.6.5 para concluir que $X > 0$ com alta probabilidade. Tudo o que precisamos para usar tal proposição é mostrar que $\Delta = o(\mathbb{E}[X]^2)$, já que conseguimos demostrar que $\mathbb{E}[X] \to \infty$.

- Pela definição, temos que $\Delta = \sum_{T_i \sim T_j} \mathbb{P}(T_i \in G \cap T_j \in G)$

- Se $T_i \in G$ e $T_j \in G$ são eventos dependentes, temos que os triângulos T_i e T_j compartilham ao menos uma aresta em comum. Na verdade, eles devem compartilhar exatamente uma aresta em comum, pois é impossível que dois triângulos distintos compartilhem duas arestas.

- Assim, $\mathbb{P}(T_i \in G \cap T_j \in G) = p^5$



- Perceba que o número de pares de triângulos de Y que compartilham uma aresta é $\binom{n}{3}(n-3)\cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$

eliminação de simetria

Formas de escolher a aresta comum

Formas de escolher o vértice de T_j

formas de escolher T_i

- Portanto, $\Delta = \sum_{T_i \sim T_j} \mathbb{P}(T_i \in G \cap T_j \in G) = \sum_{T_i \sim T_j} p^5 = \binom{n}{3}(n-3)\cdot\frac{3}{2}\cdot p^5$

- Por fim:

$$\frac{\Delta}{\mathbb{E}[X]^2} = \frac{\binom{n}{3}(n-3)\cdot\frac{3}{2}\cdot p^5}{\left[\binom{n}{3}p^3\right]^2} = \frac{3(n-3)\,p^5}{2\binom{n}{3}p^6} \leq \frac{3n}{2\left(\frac{n^3}{3^3}\right)\cdot p}$$

$$= \frac{3^4 \cancel{n}}{2n^3\cdot p^6} = \frac{3^4}{2}\cdot\frac{1}{n^2 p} \leq \frac{3^4}{2}\cdot\frac{1}{np} \to 0$$

o que mostra que $\Delta = o(\mathbb{E}[X]^2)$.

- Como $\mathbb{E}[X] \to \infty$ e $\Delta = o(\mathbb{E}[X]^2)$, pela proposição 5.6.5 temos que $\mathbb{P}(X > 0) \to 1$ quando $n \to \infty$ $\square$

$\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(K_3 \subset G)$

Corolário.

$$\mathbb{P}(K_3 \subseteq G(n,p)) \to \begin{cases} 0, & \text{se } p \ll 1/n \\ 1, & \text{se } p \gg 1/n \end{cases}$$

Def. Uma função $p_c = p_c(n)$ é um <u>limiar</u> p/ uma família de grafos A se

$$\mathbb{P}(G(n,p) \in A) \to \begin{cases} 0, & \text{para todo } p \ll p_c \\ 1, & \text{para todo } p \gg p_c \end{cases}$$

def. Denote $\mathcal{G}$ a coleção de todos os grafos e $\mathcal{G}_n$ a coleção dos grafos com n vértices. Uma família $A_n \subseteq \mathcal{G}_n$ é <u>crescente</u> se, para todo $G \in A_n$, temos que o grafo simples $G + uv$ (Arestas duplicadas são eliminadas) também pertence à A_n, para qualquer $u, v \in V(G)$. Uma família A é crescente se $A_n := A \cap \mathcal{G}_n$ é crescente p/ todo n

Exemplos de famílias crescentes

- $\mathcal{C} = \{ G \in \mathcal{G} : G \text{ é conexo} \}$

  note que se adicionarmos uma aresta a um grafo conexo, teremos que o grafo resultante também será conexo.

- $H = \{ G \in \mathcal{G} : G \text{ contém triângulo} \}$

- $T = \{ G \in \mathcal{G} : G \text{ tem ciclo Hamiltoniano} \}$

<u>def.</u> Dizemos que família A é <u>ñ trivial</u> se $A_n \notin \{\emptyset, \mathcal{G}_n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Teo. 6.4.3. Toda família ñ trivial e crescente possui um limiar.